Ispitni zadaci iz Primijenjene matematike za školsku 2009./2010. godinu

Nastavnik: Doc. Dr Vladimir Jovanović

1. Riješiti nejednačine:
   (a) $\frac{4x+1}{4(2-x)} \geq x+2$
   (b) $2|x+1| < x+4$.

2. (a) Pojednostaviti izraz $(\frac{a^{m+n}}{a^n})^m \cdot (\frac{a^{n-m}}{a^n})^{m-n}$
   (b) Riješiti jednačinu $5^x = 2^{x+1}$.

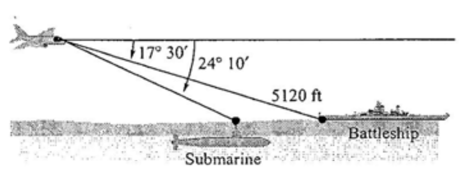
3. Riješiti jednačine: (a) $\frac{2\log_3 x}{\log_3 x-1} = -\log_3 x + \frac{2}{\log_3 x-1}$ (b) $\log_{x-1} 3 = 2$
   (c) $2\log_{10}\left(x+\frac{1}{2}\right) - \log_{10}(x-1) = \log_{10}\left(x+\frac{5}{2}\right) + \log_{10} 2$.

4. Naći $x = \dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, ako je $a = 85.39 \pm 0.01$, $b = 45.1 \pm 0.05$, $c = 708.75 \pm 0.05$. Kolika je apsolutna greška?

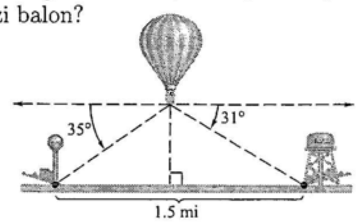
5. Sa kojom tačnošću treba mjeriti $h = 46$ i $r = 38$ (tj. kolika je dozvoljena relativna greška prilikom mjerenja) u formuli $R = \dfrac{r^2}{2h} + \dfrac{h}{r}$ da bi se R dobilo sa tačnošću od 0.3% ?

6. Posmatrači A i B nalaze se na međusobnoj udaljenosti od 950 ft. Ako posmatrač A vidi avion pod uglom od 52°, a posmatrač B pod uglom od 57°, odrediti na kojoj se visini nalazi avion.

7. Iz aviona koji leti iznad okeana podmornica se vidi pod uglom od 24° 10′, a ratni brod pod uglom od 17° 30′ u odnosu na pravac leta aviona. Ako je udaljenost od aviona do ratnog broda 5120 ft, odrediti udaljenost između podmornice i ratnog broda.

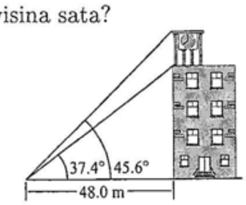


8. Balon se nalazi tačno iznad puta koji spaja dva sela i čija je dužina 1.5 milja. Bliže selo vidi se iz balona pod uglom od 35°, a dalje selo pod uglom od 31°. Na kojoj se visini nalazi balon?



9. Stojeći na obali rijeke posmatrač vidi drvo na suprotnoj obali pod uglom od 30°, a ako se odmakne od obale za 25m, vidi isto to drvo pod uglom od 20°. Koliko je visoko drvo, a kolika je širina rijeke?

10. Posmatrač koji se nalazi 48m udaljen jedne zgrade vidi vrh te zgrade pod uglom od 37.4°, dok vrh sata koji se nalazi na vrhu zgrade vidi pod uglom od 45.6°. Kolika je visina sata?



11. Kazaljke na gradskom satu su dužine 62cm i 85cm. Odrediti udaljenost između vrhova kazaljki u a) 9.30h i b) 7.15h.

12. Pješak se kreće 5 km iz tačke A u smjeru N53°E (north 53° east), a zatim dodatnih 3km u smjeru E17°S, čime dolazi u tačku B. Trkač direktno trči iz A u B. Odrediti smjer kretanja trkača i dužinu koju pređe.

13. Odrediti udaljenost između Moskve i Madrida, ako su njihove geografske koordinate date sa

Grad	Moskva	Madrid
Dužina	36.6° (i)	3.8° (z)
Širina	55.8° (s)	40.4° (s)

Pri tome uzeti da je poluprečnik Zemlje 6378 km.

14. Gausovom metodom eliminacije riješiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \\
3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\
-x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -7
\end{array}$$

15. Odrediti sve moguće dvočlane zbirove i proizvode matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Riješiri jednačinu

$$\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0.$$

17. Riješiti matričnu jednačinu $(AX - B)C = D$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -22 & 15 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

18. Riješiti matričnu jednačinu $AX - BX = C$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

19. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & p \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

odrediti p, tako da je $\det A$=35. Za tako dobijeno p riješiti sistem

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

20. Neka je $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 5$ i neka je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak $30°$. Naći površinu paralelograma čije su stranice date vektorima $2\vec{b} - \vec{a}$ i $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

21. Data su tri uzastopna tjemena paralelograma ABCD: A(1,-2,0), B(3,1,3), C(3,1,0). Odrediti četvrto tjeme D, dužinu dijagonale $\overline{BD}$, te površinu paralelograma ABCD.

22. Tačke A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6) i D(2,3,8) su tjemena piramide. Izračunati zapreminu te piramide i visinu koja odgovara osnovi BCD.

23. Date su ravni $\pi_1 : x - y - 2z + 2 = 0$, $\pi_2 : y + z - 5 = 0$ i prava $p : \frac{x+3}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

(1) Napisati pravu $\pi_1 \cap \pi_2$ u kanonskom obliku i naći presjek $\pi_1 \cap p$.

(2) Odrediti ugao između ravni π_1 i π_2

24. Naći projekciju prave $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ na ravan $\pi: x - y + 2z = -2$.

25. Izračunati rastojanje tačke $T\,(2,\,-1,\,3)$ od prave $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$.

26. Populacioni model prve kolonije mrava dat je funkcijom $P_1(t) = 50 \cdot e^{0.1\,t}$, a druge kolonije funkcijom $P_2(t) = 500 - 450 \cdot e^{-0.1\,t}$, gdje je vrijeme $t \geq 0$ izraženo u danima.

(a) Kolika je na početku bila populacija mrava u prvoj, a kolika u drugoj koloniji?

(b) Kolike su populacije nakon 10 dana?

(c) Skicirati na istom grafiku P_1 i P_2.

(d) U kom trenutku će ove dvije kolonije biti iste brojnosti?

27. Temperatura zvijezde čija je početna površinska temperatura 15000^0C, ponaša se po modelu $T(t) = T_0 \cdot 10^{-0.1\,t}$, gdje se vrijeme $t \geq 0$ mjeri u milionima godina.

(a) Odrediti T_0.

(b) Naći temperatutu zvijezde nakon 10 miliona godina.

(c) Koliko će vremena proći prije nego temperatura zvijezde dostigne polovinu svoje početne vrijednosti?

(d) Skicirati graf funkcije T.

28. Prosječan rezultat(u funkciji vremena) na testu znanja u nekom odjeljenju modelovan je funkcijom $S(t) = 90 - 20\log_2(t+1), 0 \leq t \leq 24$, gdje se $t \geq 0$ mjeri u mjesecima.

(a) Koliki je prosječan rezultat na prvom testu, tj. kad je $t = 0$?

(b) Koliki je bio prosječan rezultat nakon 2 godine?

(c) Koliko vremena treba da prođe da se test ponovi, ako se ponavljanje vrši kad prosječan rezultat padne na 80?

29. Djevojka se približava tornju visokom 75 m brzinom 5km/h. Kojom brzinom se mijenja njena udaljenost od vrha tornja u trenutku kad se nalazi na 50 m od podnožja tornja?

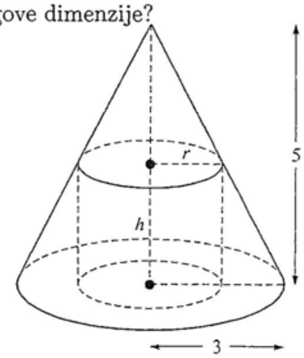
30. Svjetionik koji se nalazi 200 m od pravolinijske obale emituje snop svjetlosti koji svaki minut napravi jednu revoluciju. Kako brzo se taj snop svjetlosti kreće duž obale

(1) u tački A na obali koja leži najbliže svjetioniku?

(2) u tački B na obali, 50m udaljenoj od tačke A?

31. Naći izvode složenih funkcija (a) $f(x) = \cos(x \ln x)$, (b) $f(x) = e^{-\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}$.

32. U kupu visine 5 cm i poluprečnika baze 3 cm upisan je valjak maksimalne zapremine (vidi sliku). Kolike su njegove dimenzije?



33. Naći dimenzije kutije površine 400cm^2 koja ima oblik kvadra čija osnova je kvadrat, a koja ima najveću zapreminu. Kolika je ta zapremina?

34. Na grafiku funkcije $y = 9 - x^2$ naći tačku koja je najbliža tački $(0, 3)$.

35. Ispitati funkciju $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3}$ i nacrtati njen grafik.

36. Ispitati funkciju $f(x) = xe^{-2x}$ i nacrtati njen grafik.

37. Ispitati funkciju $f(x) = x^4 - 2x^2$ i nacrtati njen grafik.

38. Odrediti površinu oblasti ograničene krivim $y = 2 - x^2$ i $y = x$.

39. Odrediti površinu oblasti ograničene krivim $y = x^2 + x - 2$ i $y = x + 2$.

40. Naći neodređeni integral $\int \frac{2x+5}{x^2+6x+10}\,dx$.

41. Naći neodređeni integral $\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$.

42. Izračunati $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.

43. Broj bakterija N u nekoj koloniji mijenja se se po Maltusovom modelu $N'(t) = kN(t)$, gdje je k neka konstanta, a vrijeme t se izražava u satima. Ako se zna da je na početku bilo 2000 bakterija, a nakon 3 sata 2200, odrediti koliko će ih biti nakon 6 sati.

44. Familija krivih definisana je pomoću diferencijalne jednačine $\frac{dy}{dx} = \frac{3-y}{1+2x}$. Među njima odrediti onu koja prolazi kroz tačku (1,1).

45. Za funkciju $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x} + yxe^{-x^2-z^2}$ odrediti $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$.

46. Pomoću Tejlorovog razvoja procijeniti kolika greška nastaje prilikom računanja površine jednakokrakog trougla, ako se stvarna vrijednost kraka 3.1m zamijeni dužinom od 3m, a ugao između krakova koji je 33^0 zamijeni sa 30^0?