

# Prijemni ispiti (2000,2002)

PMF Banja Luka, Odsjek za matematiku i informatiku

1. Riješiti jednačinu  $\log_2 |x - 1| = 3$ .

2. Uprostiti izraz

$$\frac{\frac{2ab}{a+b} - a}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a-2b}} + \frac{\frac{2ab}{a+b} - b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-2a}}.$$

3. Riješiti jednačinu  $\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{2} = 1$ .

4. Odrediti realni dio kompleksnog broja

$$\frac{z^2 + 3\bar{z} + i^{2000}}{|z|^2 - z},$$

gdje je  $z = 1 + i$ .

5. Za koju vrijednost realnog parametra  $m$  je formula

$$-3 < \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

tačna za svaki realan broj  $x$ .

6.  $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$   
je cijeli broj. Koji?

7. Unutar prave kupe upisane su dvije lopte poluprečnika 1, odnosno 2. Veća lopta dodiruje bazu, omotač kupe i manju loptu, a manja dodiruje veću loptu i omotač. Naći zapreminu kupe.

8. Od svih jednakokrakih trapeza opisanih oko kružnice poluprečnika 8 naći onaj sa najmanjom površinom.

9. Na hiperboli  $xy = a$ ,  $a > 0$  date su četiri tačke  $T_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Dokazati da ako te tačke leže na jednoj kružnici, onda je  $x_1x_2x_3x_4 = a^2$ .

10. Neka skup  $S$  ima  $n$  elemenata. Koliko ima uređenih parova  $(A, B)$  takvih da je  $A \subset B \subset S$  (skup  $A$ , odnosno  $B$  može biti i prazan).

1. Riješiti jednačinu  $2^{|x-3|} = 16$ .

2. Uprostiti izraz

$$\frac{\frac{x^2}{x+y} - \frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}}{\frac{x}{x+y} - \frac{x^2}{x^2-y^2}}.$$

3. Ako je  $\cos 2x = \frac{1}{2}$  i  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , koliko je  $\sin 7x$ ?

4. Odrediti modul kompleksnog broja

$$\frac{1 + i + i^{2000}}{1 + i^{2000} - i}.$$

5. Naći površinu kružnog prstena između dvije koncentrične kružnice, ako je dužina odsječka tangente na manju kružnicu, koju odsjeca veća kružnica jednaka 8.

6. Prostorna dijagonala kvadra dužine 8 zaklapa sa bazom ugao od  $30^\circ$ . Dijagonala baze sa ivicom baze zaklapa ugao od  $60^\circ$ . Odrediti zapreminu kvadra.

7. Odrediti jednačinu kružnice upisane u romb, čija su tjemena presjek elipse  $4x^2 + 25y^2 = 100$  i koordinatnih osa kao i tačke dodira kružnice i stranica romba.

8. Odrediti sve vrijednosti za  $q$  za koje je  $x_1^2 - x_2^2 > 3$ , gdje su  $x_1$  i  $x_2$  korijeni jednačine  $x^2 + 6x + q = 0$ .

9. Na pravoj  $8x + 5y - 7 = 0$  naći cjelobrojnu tačku najbližu koordinatnom početku (cjelobrojna tačka je tačka čije su obje koordinate cijeli brojevi).

10. U nekom konveksnom  $n$ -touglu nikoje tri dijagonale se ne sijeku u jednoj tački. Koliko ukupno ima presječnih tačaka dijagonala datog  $n$ -tougla (vrhovi se, naravno, ne računaju)?